Corrigé

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc également continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3e^{-x} + (3x-4)(-e^{-x}) = e^{-x}(7-3x)$.La fonction exponentielle étant toujours positive, f' a le même signe que $x \mapsto 7 - 3x$ d'où le tableau de variations suivant sur l'intervalle $[0; 4]$.

x	0		$\frac{7}{3}$		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-4	$\nearrow$	$3e^{-\frac{7}{3}}$	$\searrow$	$8e^{-4}$

Comme f est strictement décroissante sur $\left[\frac{7}{3} ; 4\right[$ et que pour tout $s \in \left[\frac{7}{3} ; 4\right[$, on a $f(x) \geqslant f(4) > 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[\frac{7}{3} ; 4\right[$. Sur $\left[0 ; \frac{7}{3}\right]$, f est continue et strictement croissante. De plus, $f(0) < 0$ et $f\left(\frac{7}{3}\right) > 0$, donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; 4]$.

2. Par balayage, on obtient $1,333 < \alpha < 1,334$.